Aula 26

Problema de Valor Inicial e Fronteira para a Equação do Calor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \\ u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L \\ u(0,t) = g_0(t), \quad u(L,t) = g_L(t) \qquad t > 0 \end{cases}$$

Equação linear homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\mathcal{L}(u)} = 0$$

e condições de fronteira homogéneas

$$g_0(t) = g_L(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t > 0.$$

Vale o Princípio da Sobreposição
ou seja
combinações lineares de soluções da equação homogénea com cond. fronteira homogéneas ainda são soluções
ou seja
o conjunto das soluções da equação homogénea com cond. fronteira homogéneas é um espaço vectorial
(de dimensão infinita)

Análogo ao sistema de EDOs

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{y}' - A\mathbf{y} = 0$$

Método de Separação de Variáveis

Procurar soluções não nulas da forma

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$$

para a equação e condições de fronteira homogéneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \end{cases}$$

Substituindo na equação

$$X(x)T'(t) = \alpha X''(x)T(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T'(t)}{\alpha T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \frac{T'(t)}{\alpha T(t)} = \lambda \Rightarrow T'(t) = \alpha\lambda T(t) \Rightarrow T(t) = e^{\alpha\lambda t} \\ \\ \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \Rightarrow X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Problema de Funções e Valores Próprios

Procurar soluções não nulas de

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda\, X(x) \\ \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

As soluções não triviais de

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda\, X(x) \\ \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

são

$$X_n(x) = C \,\textsf{sen}\, \left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \textsf{para} \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

As correspondente soluções obtidas por separação de variáveis são

$$X_n(x)T_n(t) = C \,\textsf{sen}\, \left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \frac{n^2\pi^2}{L^2} t}$$

e as soluções da equação do calor com condições de fronteira nulas, obtidas por "combinação linear infinita" destas são

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \,\textsf{sen}\, \left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \frac{n^2\pi^2}{L^2} t}}$$

No caso de condições de fronteira de Dirichlet homogéneas, ou seja, da barra com as extremidades isoladas, as soluções não triviais de

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda\, X(x) \\ \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

são

$$X_0(x) = C \cdot 1 \quad \text{para} \quad \lambda_0 = 0,$$

e

$$X_n(x) = C \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{para} \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

e as soluções da equação do calor com condições de fronteira com derivadas nulas, correspondentes às extremidades da barra isoladas termicamente, são

$$\boxed{u(x,t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \frac{n^2\pi^2}{L^2} t}}$$

Séries de Fourier

Como representar uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ como uma série de senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad ????$$

ou mais geralmente uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como uma série de senos e cosenos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$